

Užitečné vztahy

Opakování

Pro goniometrické funkce platí

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

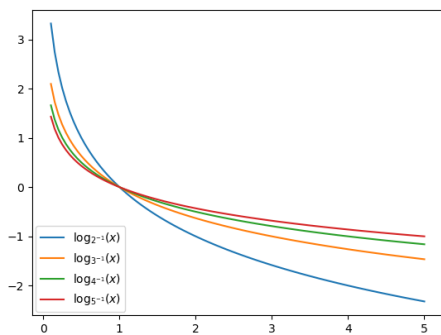
$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

Pro logaritmus platí

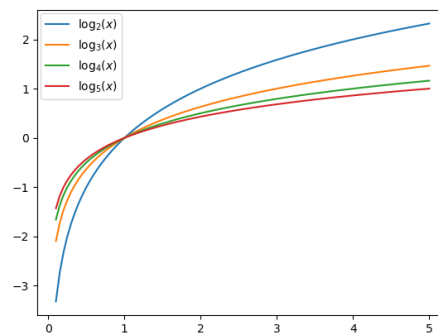
$$\forall a, x, y \in (0, \infty) : \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$$

$$\forall a, x \in (0, \infty) \forall y \in \mathbb{R} : y \log_a(x) = \log_a(x^y)$$

$$\forall a, b, x \in (0, \infty) : \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$



(a) $a < 1$



(b) $a > 1$

Obrázek 1: $y = \log_a(x)$

Funkce

Mějme množiny A, B, C . Potom

- fce $f : A \rightarrow B$ je zobrazení (předpis), který každému $x \in A$ přiřazuje nějaké $f(x) \in B$. Obraz množiny A je množina

$$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A : f(x) = y\},$$

- inverzní fce k f je $f^{-1} : B \rightarrow A$, která pro libovolnou dvojici $x \in A$ a $y \in B$ splňuje

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

- složení dvou zobrazení $f : A \rightarrow B$ a $g : B \rightarrow C$ je fce $h : A \rightarrow C$ splňující $h(x) = g(f(x)) \forall x \in A$. Používá se značení $h = g \circ f$.

Fce $f : A \rightarrow B$ je

- prostá, pokud $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$,
- na (neboli surjektivní), pokud $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$,
- bijekce, pokud je f prostá a na.

Pro $M \subseteq \mathbb{R}$ a $x \in M$ platí, že

- x je maximum $M \Leftrightarrow \forall a \in M : a \leq x$.
- x je minimum $M \Leftrightarrow \forall a \in M : a \geq x$.
- x je supremum $M \Leftrightarrow (\forall a \in M : a \leq x) \wedge (\forall \epsilon > 0 \exists b \in M : x - \epsilon \leq b)$.
- x je infimum $M \Leftrightarrow (\forall a \in M : a \geq x) \wedge (\forall \epsilon > 0 \exists b \in M : x + \epsilon \geq b)$.

Posloupnosti

Posloupnost je fce $a : \mathbb{N} \rightarrow M$, kde jednotlivé členy posloupnosti značíme $a(n) = a_n$. Celou posloupnost pak značíme $(a_n) = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Posloupnost nazveme

- (a) rostoucí (resp. klesající), pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$ (resp. $a_{n+1} < a_n$),
- (b) nerostoucí (resp. neklesající), pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq a_n$ (resp. $a_{n+1} \geq a_n$).

Mějme nyní reálnou posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$. Číslo a nazveme (vlastní) limitou posloupnosti (a_n) , pokud

$$\forall \epsilon > 0 \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \forall n > \tilde{n} : |a - a_n| < \epsilon.$$

Řekneme, že posloupnost má nevlastní limitu $\pm\infty$, pokud

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \forall n > \tilde{n} : \pm a_n > K.$$

K označení používáme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim a_n = a.$$

Exponenciála se základem e se dá definovat pomocí nekonečné řady

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{x}{n}\right)^i = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

Posloupnosti II

Pro $a \in \mathbb{R}$ jsou definované výrazy $a \pm \infty$, $\pm(\infty + \infty)$, $a \cdot (\pm\infty)$, $\frac{a}{\pm\infty}$ a pro $a \neq 0$ i $\frac{\pm\infty}{a}$. Jiné výrazy s nekonečny nejsou dobře definované.

Nechť a_n , b_n a c_n jsou posloupnosti a $a \in \mathbb{R}$. Potom

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.
2. Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a b_n je podposloupnost a_n . Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
3. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je nezávislé na n , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.
4. Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a b_n je omezená. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.
5. Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ a necht' $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.
6. Nechť $a_n \geq 0 \forall n > n_0 \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{b_n \ln(a_n)}$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Řady

Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definujeme částečný součet

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \cdots + a_n.$$

Nekonečnou řadu pak definujeme jako $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Řadu nazveme absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Absolutní konvergence implikuje neabsolutní

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy.

- Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (*nutná podmínka konvergence*)
- Pokud $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. (*srovnávací kritérium*)
- Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. (*Cauchyovo odmocninové kritérium*)
- Pokud $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pokud $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. (*Cauchyovo odmocninové kritérium*)
- Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pokud $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. (*d'Alambertovo podílové kritérium*)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady a necht' $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$.

- Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ má omezené částečné součty, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. (*Dirichletovo kritérium*)
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. (*Abelovo kritérium*)
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. (*Cauchyovo kondenzační kritérium*)

Limity funkcí

Znamé limity jsou

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Platnost ukážeme později.

Symboly o a O :

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\delta > 0$ a f, g jsou definované na prstencovém okolí $P(a, \delta)$, přičemž g je zde kladná. Pokud

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

potom píšeme $f = o(g)$ pro $x \rightarrow a$.

Pokud existuje $c > 0$ tak, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : |f(x)| < cg(x),$$

pak píšeme, že $f = O(g)$ pro $x \rightarrow a$.

Heineho věta:

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, $P(a, \delta) \cap M \neq \emptyset$ pro každé $\delta > 0$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak jsou ekvivalentní následující tvrzení

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$,
- $\forall x_n \subset M : x_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Limita složené fce: Nechť $c, A, B \in \mathbb{R}^*$, $f(x)$ je definovaná na nějakém prstencovém okolí A , fce $g(x)$ je definovaná na nějakém prstencovém okolí c ,

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = A,$$

a platí alespoň jedna z podmínek

- $f(x)$ je spojitá v bodě A ,
- Na nějakém prstencovém okolí $P(c, \delta)$ fce $g(x)$ nenabývá hodnoty A .

Potom

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = B.$$

Sčítací vzorec pro \tan je

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \tan(b)}.$$

Derivace

Derivaci definujeme pomocí

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f = f' (= f_{,x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Derivace vyššího řádu (tady k) značíme

$$\frac{d^k f}{dx^k} = f^{(k)} (= f_{,x\dots x}) = \underbrace{\frac{d}{dx} \dots \frac{d}{dx}}_{k\text{-krát}} f.$$

Na cvičení 7 jsme spočítali základní limity

$$(a) \frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$(d) \frac{de^x}{dx} = e^x,$$

$$(b) \frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x),$$

$$(e) \frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$(c) \frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x),$$

$$(f) \frac{d\arctan(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dále na přednášce se dokázalo (pro $f(x), g(x)$ fce a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$(a) \frac{df \cdot g}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx},$$

$$(c) \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \frac{dg(x)}{dx},$$

$$(b) \frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g) = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{dg}{dx},$$

$$(d) \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Pro výpočet limity ve které se vyskytuje neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$, nebo $\frac{0}{0}$ lze použít l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Průběh funkce

Pro funkce $f \in C^1$ platí,

- (a) $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí v bodě x ,
- (b) $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je klesající v bodě x ,
- (c) $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ má v bodě x lokální extrém.

Pro funkce $f \in C^2$ platí,

- (a) $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je konvexní v bodě x ,
- (b) $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ je konkávní v bodě x ,
- (c) $f''(x) = 0 \Rightarrow f$ má v bodě x inflexní bod.

Pokud má funkce f asymptotu $y = kx + q$ když jde to $\pm\infty$, pak

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - kx$$

jsou vlastní limity.

Taylorův rozvoj

Taylorův polynom stupně $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ funkce f je

$$T_n^{f,x_0}(x) = T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i = \\ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Zbytek (chyba) Taylorovy aproximace je dána jako

$$R_n^{f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

kde c leží mezi x a x_0 .

Některé základní Taylorovy polynomy v bodě $x_0 = 0$ jsou

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \\ \cos(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \\ \arctan(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^{2i+1}}{2i+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \\ e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Integrály

Věta o substituci (alias “inverzní derivace složené fce”)

Mějme $\phi : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ a $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, kde ϕ má vlastní první derivaci všude na (a, b) . Pak

$$F(\phi(x)) + c = \int f(\phi(x))\phi'(x) dx,$$

kde $F : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ je primitivní funkce f .

Integrace per partes (alias “inverzní derivace součinu”)

Nechť $f, g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité na (α, β) a $F, G : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou k nim primitivní funkce. Pak

$$F(x)G(x) + c = \int f(x)G(x) dx + \int F(x)g(x) dx.$$

Linearita (alias linearita)

Nechť $f, g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$\int \alpha f + \beta g dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx$$

Určité integrály

Fundamental theorem of calculus:

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$ a necht' F je primitivní funkce k f . Pak

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Věta o substituci

Nechť $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, kde ϕ má vlastní první derivaci všude na (a, b) . Označme

$$J := \phi((a, b)) = \{\phi(t), t \in (a, b)\}.$$

Nechť f je spojitá na J a integrovatelná na vnitřku J . Pak

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) \, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) \, dx.$$

Integrace per partes

Nechť $f, g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité na (α, β) a $F, G : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou k nim primitivní funkce. Pak

$$\int_a^b f(x)G(x) \, dx = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)g(x) \, dx,$$

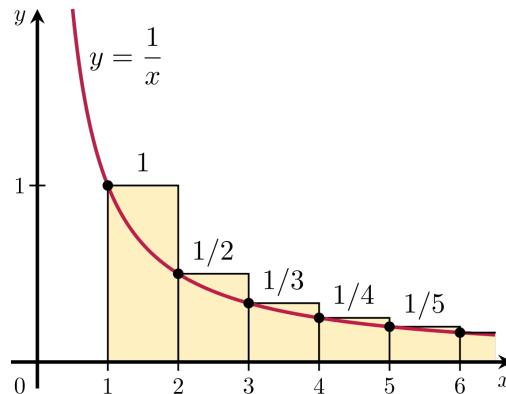
kde

$$[FG]_a^b = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Integrální kritérium konvergence:

Nechť $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je nezáporná, klesající fce. Pak

$$\int_1^{\infty} f(x) \, dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(x) \leq \int_1^{\infty} f(x-1) \, dx$$



Obrázek 2: Vizualizace integrálního kritéria.

Určité integrály II

Délka křivky

Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má na $[a, b]$ spojitou první derivaci. Pak délka křivky l grafu mezi a a b je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx.$$

Rotační těleso

Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Pak objem tělesa vzniklého rotací grafu f v \mathbb{R}^3 kolem osy x je

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

a jeho povrch je

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx.$$

Proč matematická analýza

Gradient

Pro fci více proměnných $f = f(x_1, \dots, x_n)$ můžeme studovat změnu její velikosti vzhledem ke každé z proměnných. Pokud budeme fixovat všechny proměnné až na k -tou, můžeme definovat parciální derivaci vzhledem ke k -té proměnné

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h},$$

kterou můžeme též značit $\partial_k f$. Taková derivace nám říká velikost změny f , pokud změníme pouze x_k . Můžeme uvažovat vektor všech takových možných změn, kterému se říká gradient

$$\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f),$$

který nám říká takovou změnu v prostoru parametrů x_i , která způsobí největší lokální změnu f , neboli je to směr nejstrmějšího růstu f v daném bodě.

Diferenciální rovnice

Rovnice, která dává do souvislosti funkci a její derivace se označuje jako diferenciální rovnice. Danou diferenciální rovnici jde klasifikovat na základě mnoha faktorů, např.

- nejvyšší řád derivace (mluvíme o diferenciální rovnici nějakého řádu),
- pokud se zde vyskytují derivace podle jedné proměnné (tkz. obyčejné diferenciální rovnice), nebo jsou v ní parciální derivace podle více proměnných (tkz. parciální diferenciální rovnice),
- zda je hledaná fce násobená jejími proměnnými (tkz. nelineární diferenciální rovnice), nebo ne (lineární),
- ...

Řešením některých typů se dá strávit celý život.